数理解析研究所講究録
792巻 1992年 9-25

新谷関数とその応用

京産大・理　村瀬篤（Atsushi Murase）
広島大・理　菅野孝史（Takashi Sugano）

古典群の標準的L関数については、[4]でサイズが2倍の群への埋め込みを利用することによって、その関数等式が考察されている（但し、ガンマ因子の決定は困難）。この稿では別種の埋め込みを利用して、L関数を帰納的にとらえることを考える。その際、異なる2つのHecke環の同時固有関数である新谷関数が用いられる。(詳細は[3]及びその続編)

§1. Embeddings

[記号]　k：標数≠2の体，

K：k or 2次拡大$/k$ or 四元数環$/k$，

$x \to \bar{x}$：K/k の main involution，

$\varepsilon = \pm 1$，$\tau(x) = x + \varepsilon\bar{x}$　$(x \in K)$，

$A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ に対し，$A^* = (\overline{a_{ji}}) \in M_{n,m}(K)$

$S(x,y) = x^*Sy$, $S[x] = S(x,x)$　$(x, y \in K^m,\ S \in M_m(K))$　とおく．

S を size m の非退化 ε-hermitian matrix ($S^* = \varepsilon S$) とし、

$S_1 = \begin{bmatrix} & & \varepsilon \\ & S & \\ 1 & & \end{bmatrix} \in M_{m+2}(K)$ とおく. $\eta = \begin{bmatrix} a \\ \alpha \\ 1 \end{bmatrix}$ $(a \in K^\times,\ \alpha \in K^m)$ で

$\Delta = S_1[\eta] \in K^\times$ なるものを一つえらんでおき、$T = \begin{bmatrix} S & -S\alpha \\ -\alpha^* S & -\tau(a) \end{bmatrix}$

とおくと、これは size $m+1$ の非退化 ε-hermtian matrix となる。

以上の状況で、K^m を K^{m+1} に、K^{m+1} を K^{m+2} に次のように

埋め込む。

(1) $$j_0 : K^m \hookrightarrow K^{m+1},\quad y \longmapsto \begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \qquad , \qquad j : K^{m+1} \hookrightarrow K^{m+2},\quad \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} -\varepsilon \bar{a} z - S(\alpha, y) \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

このとき、$\xi = \begin{bmatrix} \alpha \\ 1 \end{bmatrix} \Delta^{-1}$ とおけば、

$$j_0(K^m) = \xi^\perp \text{ in } K^{m+1} \quad , \quad j(K^{m+1}) = \eta^\perp \text{ in } K^{m+2}$$

また、T は S_1 の K^{m+1} への制限に他ならない。

G, H, G_1 をそれぞれ、S, T, S_1 のユニタリ群とする (i.e. $G = \{ g \in GL_m(K) \mid g^* S g = S \}$ 等)。(1) から自然に、群の埋め込み

(2) $$G \xhookrightarrow{\iota_0} H \xhookrightarrow{\iota} G_1$$

が生じ、$\iota_0(G) = H_\xi = \{ h \in H \mid h\xi = \xi \}$, $\iota(H) = G_{1,\eta}$ となる。

(しばしば埋め込み ι_0, ι を略し、それぞれ部分群とみる)

我々の目的は、k が *global field* の場合に、H上の保型形式のL関数と、G上の保型形式のL関数の関係を調べることにある（L関数を *size* に関し、帰納的にとらえる）。

G_1 の極大放物部分群

$$P_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & 0 & * \end{bmatrix} \in G_1 \right\} \qquad (\mathrm{Levi} \cong K^\times \times G)$$

を考え、その *unipotent radical* を N_1 であらわす。埋め込みの定義より、$P_1 \cap \iota(H) = \iota\, \iota_0(G)$ である。

<u>Proposition 1</u>　　K: *division* とする。

(i)　T : *anisotropic* $\Rightarrow$ $G_1 = P_1 \cdot \iota(H)$

(ii)　T : *isotropic* $\Rightarrow$ $^\exists x_0 \in G_1$ s.t. $G_1 = P_1 \iota(H) \amalg P_1 x_0 \iota(H)$,

更に、Hの極大放物部分群 P' で

$x_0^{-1} P_1 x_0 \cap \iota(H) = \iota(P')$, $x_0 \iota(N') x_0^{-1} \subset N_1$　なるものが存在する。

（N' : P' の *unipotent radical*）

§2. Basic Identity

この§では、$k = \mathbb{Q}$ とし、各素数 p に対し、$U_p = G(\mathbb{Z}_p)$, $\underline{U}_p = H(\mathbb{Z}_p)$, $U_{1,p} = G_1(\mathbb{Z}_p)$ とおく。簡単のため、$\iota_0(U_p) \subset \underline{U}_p$, $\iota(\underline{U}_p) \subset U_{1,p}$ 及び岩沢分解 $G_{1,p} = P_{1,p} U_{1,p}$ を仮定しておく。無限素点に対しても $U_\infty \subset \underline{U}_\infty \subset U_{1,\infty}$ をとり、$U_{1,\infty}$ の1次表現 ρ_∞ をとっておく。

$S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ で、尖点形式の空間

$$\left\{ f : G_{\mathbb{Q}}\backslash G_A / \prod_{p<\infty} U_p \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} f(gu_\infty) = f(g)\rho_\infty(u_\infty) \\ \text{適当な解析的条件, cuspidal} \end{array} \right\}$$

をあらわす。

$F \in S(\prod_p \underline{U}_p, \rho_\infty)$, $f \in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ に対し、

(3) $$W_{F,f}(h) \underset{\mathrm{def}}{=} \int_{G_{\mathbb{Q}}\backslash G_A} F(gh)\overline{f(g)}\,dg \qquad (h \in H_A)$$

を、(F, f) に付随した (global) Shintani function と呼ぶ。定義より、$W_{F,f}(1)$ は $F|G_A$ と f との (G_A における) Petersson 内積となる。

次に f に付随した Eisenstein 級数を、

(4) $$E(g, f; s) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\gamma \in P_{1,\mathbb{Q}}\backslash G_{1,\mathbb{Q}}} f(\gamma g; s+\sigma)$$ で導入する。

ここで、$g \in G_{1,A}$ を

$$g = \begin{bmatrix} \alpha(g) & * & * \\ & \beta(g) & * \\ & & \overline{\alpha(g)}^{-1} \end{bmatrix} u(g) \qquad (u(g) \in \prod_{p\leq\infty} U_{1,p})$$

と岩沢分解するとき、

$$f(g; s) = f(\beta(g))\,|N(\alpha(g))|_A^{s}\,\rho_\infty(u(g))$$ であり、

$$\sigma = \begin{cases} \frac{m}{2} & K = k,\ \varepsilon = 1 \\ \frac{m+1}{2} & K/k : 2\text{次体}, \\ m + \frac{\kappa}{2} & K : \text{quaternion}, \quad \kappa = \dim_k \mathrm{Ker}(\tau). \end{cases}$$

一般論より、(4) は $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ で絶対収束し、全 s-平面に解析接続される。Proposition 1 より次を得る。

<u>Proposition 2 (Basic Identity)</u>

$F\in S(\prod_p \underline{U}_p, \rho_\infty)$, $f\in S(\prod_p U_p, \rho_\infty)$ のとき、

$$\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_A} F(h)\,\overline{E(u(h), f, \bar{s}-\tfrac{1}{2})}\,dh$$
$$=\int_{G_A\backslash H_A} W_{F,f}(\beta(h)^{-1}h)\,|N(\alpha(h))|_A^{s-\frac{1}{2}+\sigma}\,\rho_\infty(u(h)_\infty)\,dh.$$

右辺が adele 上の積分となっていることから、Euler積に分解されることが期待できる。次節で、$K=k$ or 2次体の場合にこれを示し、右辺が L 関数の比として表示されることを見る。なお、左辺の Eisenstein series との convolution については古沢-Shalika [1] で一般的に論じられている。

<u>§3. local Shintani functions</u>

この§では、k を非アルキメデス局所体、$\mathcal{O}$ をその極大整環とし、K の極大整環を Θ であらわす。また、Θ^n, Θ^{n+1} がそれぞれ S, T に関して maximal Θ-integral であると仮定する。この時、Hecke環 $\mathcal{H}(G, G_{\mathcal{O}})=\{\phi: G_{\mathcal{O}}\backslash G/G_{\mathcal{O}}\longrightarrow\mathbb{C} \mid \mathrm{supp}\,\phi: \text{compact}\}$, $\mathcal{H}(H, H_{\mathcal{O}})$ はともに可換となることが知ら

れている。λ, Λ を、それぞれ $\mathcal{H}(G,G_{\mathcal{O}})$, $\mathcal{H}(H,H_{\mathcal{O}})$ の1次表現とし、type (λ,Λ) の local Shintani functions の空間を、

(5) $$W(\lambda,\Lambda) \underset{def}{=} \left\{ W : G_{\mathcal{O}}\backslash H / H_{\mathcal{O}} \to \mathbb{C} \;\middle|\; \begin{array}{l} \phi * W * \Phi = \lambda(\phi)\Lambda(\Phi) W \\ {}^{\forall}\phi \in \mathcal{H}(G,G_{\mathcal{O}}),\ {}^{\forall}\Phi \in \mathcal{H}(H,H_{\mathcal{O}}) \end{array} \right\}$$

で定義する。

次の問題は基本的であるが、一般には解決されていない。

<u>問題</u> ① $\dim_{\mathbb{C}} W(\lambda,\Lambda) \le 1$?

② $\dim = 1$ のとき、explicit formula を与えよ。

しかし、ある積分値は決定でき、L関数を用いて表示される。具体的に計算が終了している2つの場合を述べておく。

<u>I. (0)-case $[K=k, \varepsilon=1]$</u>

$\mathcal{H}(G,G_{\mathcal{O}})$ の1次表現 λ の Satake parameter を、$(\lambda_1,\cdots,\lambda_\nu)$ とする（$m=2\nu+n_0$, ν : S の Witt index）と書く。λ の local standard L-function を次のように normalize しておく。

(6) $$L(\lambda;s) \underset{def}{=} \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} (1-\lambda_j q^{-s})^{-1} (1-\lambda_j^{-1} q^{-s})^{-1} \right\} \times A_S(s),$$

ここで、$q = |\mathcal{O}/p\cdot\mathcal{O}|$ （p : k の素元），

$$\partial = \partial(S) \underset{def}{=} \dim_{\mathcal{O}/p\cdot\mathcal{O}} \{ x \in S^{-1}\mathcal{O}^m \mid \tfrac{1}{2}S[x] \in p^{-1}\mathcal{O} \} / \mathcal{O}^m$$

とすると、A_S は次のリストで定義される。

$$A_S(s) = \begin{cases} 1 & \text{if } (n_0, \partial) = (0,0) \text{ or } (1,0), \\ 1+q^{\frac{1}{2}-s} & \text{if } (n_0,\partial) = (1,1), \\ (1-q^{-2s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (2,0), \\ (1-q^{-s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (2,1), \\ (1+q^{1-s})(1-q^{-s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (2,2), \\ (1-q^{-\frac{1}{2}-s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (3,1), \\ (1+q^{\frac{1}{2}-s})(1-q^{-\frac{1}{2}-s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (3,2), \\ (1-q^{-s})^{-1}(1-q^{-1-s})^{-1} & \text{if } (n_0,\partial) = (4,2). \end{cases}$$

<u>Theorem 1 [(0)-case]</u>　$\partial(S) = \partial(T)$ とする．$W \in W(\lambda, \Lambda)$ に対し，

$$\int_{G\backslash H} W(\beta(k)^{-1}h)\,|\alpha(h)|^{s+\frac{m-1}{2}}\,dh$$
$$= W(1)\ L(\Lambda; s)\ L(\lambda; s+\tfrac{1}{2})^{-1} \times \begin{cases} 1 & \cdots\cdots \text{if } m: \text{even} \\ \zeta_p(2s)^{-1} & \cdots\cdots \text{if } m: \text{odd}. \end{cases}$$

II. (U)-case [K/k : 2次，$\varepsilon = 1$]

簡単のため，P が K で分岐しているならば $P \nmid 2$ を仮定しておく．K が 2 次拡大体の場合，π を K の素元とし

$$\partial(S) = \dim_{\mathcal{O}/(\pi)} \{ x \in S^{-1}\mathcal{O}^m \mid S[x] \in \tau(\pi^{-1}\mathcal{O}) \} / \mathcal{O}^m$$ とおく．

local standard L function を次のように *normalize* する．

(i) $K = k \oplus k$ のとき：λ を $\mathcal{H}(G, G_{\mathcal{O}}) \cong \mathcal{H}(GL_m(k), GL_m(\mathcal{O}))$ の *Satake parameter* とし，

(7)　$$L(\lambda; s) \underset{\mathrm{def}}{=} \prod_{j=1}^{m} (1-\lambda_j q^{-s})^{-1} (1-\lambda_j^{-1} q^{-s})^{-1}.$$

(ii) K/k が2次拡大体のとき：λ を $\mathcal{H}(G, G_0)$ の Satake parameter，$q' = |\Theta / \pi\Theta|$ とする．

$$(8) \qquad L(\lambda; s) \underset{\mathrm{def}}{=} \left\{ \prod_{j=1}^{\nu} (1 - \lambda_j q'^{-s})^{-1} (1 - \lambda_j^{-1} q'^{-s})^{-1} \right\} \times A_S(s),$$

$$(m = 2\nu + n_0, \quad \nu : \text{Witt index})$$

ここで，

$$A_S(s) = \begin{cases} 1 & K/k : \text{不分岐} \quad (n_0, \partial) = (0,0) \\ (1 - q^{-2s})^{-1} & \quad '' \quad (n_0, \partial) = (1, 0) \\ (1 - q^{-2s})^{-1}(1 + q^{-2s+1}) & \quad '' \quad (n_0, \partial) = (1, 1) \\ (1 - q^{-2s-1})^{-1} & \quad '' \quad (n_0, \partial) = (2, 1) \\ (1 + q^{-(s-\frac{1}{2})}) & K/k : \text{分岐} \quad n_0 = 0 \\ (1 - q^{-s})^{-1} & \quad '' \quad n_0 = 1 \\ (1 - q^{-(s+\frac{1}{2})})^{-1} & \quad '' \quad n_0 = 2. \end{cases}$$

Theorem 1 [(U)-case] $\partial(S) = \partial(T)$，$p$ が K で分岐するならば $p \nmid 2$ とする。$W \in W(\lambda, \Lambda)$ に対し次式が成立．

$$\int_{G \backslash H} W(\beta(h)^{-1} h) \, |N_{K/k}(\alpha)|^{s + \frac{m}{2}} \, dh$$

$$= W(1) \, L(\Lambda; s) \, L(\lambda; s + \tfrac{1}{2})^{-1} \times \begin{cases} \zeta_p(2s)^{-1} & \cdots\cdots m : \text{even} \\ L_p(\chi_K; 2s)^{-1} & \cdots\cdots m : \text{odd} \end{cases}$$

ここで．χ_K は K/k に対応する character．

[証明の outline] (U)-case を例にとる．$g \in G$ の単因子が $(p^{e_1}, \cdots, p^{e_m})$ のとき，

(9) $$N_{G,s}(g) \underset{\mathrm{def}}{=} q^{-\sum_{e_i<0}|e_i|\cdot s}$$ とおく．

次の Lemma が成立。

<u>Lemma A</u> $N_{H,s}(h) = N_{G,s}(\beta(h))\,|\alpha(h)|^{s} \qquad (h\in H)$

<u>Lemma B</u> $f: G/G_{\theta} \longrightarrow \mathbb{C}$，$f*\phi = \lambda(\phi) f \quad ({}^{\forall}\phi\in\mathcal{H}(G,G_{\theta}))$

のとき，$\displaystyle\int_G f(g)\, N_{G,s+\frac{m}{2}-1}(g)\, dg$

$$= f(1)\,\frac{L(\lambda_f : s)}{A_S(s)} \prod_{j=0}^{\nu-1}\left(1-q^{-(s+j+\frac{n_0}{2})}\right)\left(1+q^{-(s+j-\partial+\frac{n_0}{2})}\right).$$

これらを用いて，

$$\int_H W(h)\, N_{H,s+\frac{m-1}{2}}(h)\, dh$$

を二通りに計算すればよい．(cf. [2])．

§4. global L-functions

$k=\mathbb{Q}$ とし，(O)-case，(U)-case を扱う．簡単のため，T を正定値，$\rho_\infty = 1$ の場合を考えよう．前節と同様に，すべての素数 p で $\mathcal{O}_p^{m}$，$\mathcal{O}_p^{m+1}$ はそれぞれ S，T に関して maximal $\mathcal{O}_p$-integral lattice で，$\partial_p(S)=\partial_p(T)$ を仮定する．更に，(U)-case では $p=2$ は K で不分岐としておく．

$f: G_{\mathbb{Q}}\backslash G_{A} / \prod_{p\le\infty} U_p \longrightarrow \mathbb{C}$ が，Hecke 環 $\otimes\mathcal{H}(G_p, G_{\mathbb{Z}_p})$

の同時固有関数のとき、その global standard L-function を、

(10) $$\zeta(f;s) \underset{\text{def}}{=} L_\infty(f;s) \prod_{p<\infty} L_p(f;s)$$

と定義．

ここで $L_p(f;s)$ は． $f*\phi = \lambda_f(\phi) f \quad ({}^\forall \phi \in \mathcal{H}(G_{\mathbb{Q}_p}, G_{\mathbb{Z}_p}))$ のとき，§3 で normalize した $L(\lambda_f;s)$ をあらわし，

$$L_\infty(f;s) \underset{\text{def}}{=} \begin{cases} (2\pi)^{-\nu s} (\det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{\nu/2} \Gamma(s-\nu-1+2j)\Gamma(s-2+2j) & \cdots\cdots (O)\ \text{case},\ m=2\nu\equiv 0\ (4) \\ (2\pi)^{-\nu s} (\det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{\frac{\nu+1}{2}} \Gamma(s-\nu-1+2j) \prod_{j=1}^{\frac{\nu-1}{2}} \Gamma(s-1+2j) & \cdots\cdots (O)\ \text{case}\quad m=2\nu\equiv 2\ (4) \\ (2\pi)^{-\nu s} (2^{-1}\det S)^{s/2} \prod_{j=1}^{\nu} \Gamma(s-\nu+2j-\frac{3}{2}) & \cdots\cdots (O)\ \text{case}\quad m=2\nu+1 \\ (2\pi)^{-ms} (\det S)^{s} |d_K|^{s([\frac{m}{2}]+\frac{1}{2})} \prod_{j=0}^{m-1} \Gamma(s-\frac{m-1}{2}+j) & \cdots\cdots (U)\ \text{case} \end{cases}$$

とおいた。

Eisenstein series の理論より．(10) で定義した L 関数は，全 s-平面に有理型関数として解析接続される．

<u>Conjecture</u> (O)-case [resp. (U)-case]

$f \in S(\prod_p U_p; 1)$: Hecke eigen とする．

(i) $$\frac{\zeta(f;s)}{\zeta(f;1-s)} = \begin{cases} -1 & m\equiv \pm 3\ (\mathrm{mod}\ 8)\quad [\text{resp. } m\equiv 2\ (\mathrm{mod}\ 4)] \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases}$$

(ii) $\xi(f;s)$ の possible poles は $\frac{m}{2}-k$ $(0\leq k\leq m-1)$ [resp. $\frac{m+1}{2}-k$ $(0\leq k\leq m)$] のみで、$s=\frac{m}{2}$ [resp. $\frac{m+1}{2}$] では高々 simple pole.

(iii) $\xi(f;s)$ が $s=\frac{m}{2}$ [resp. $\frac{m+1}{2}$] で pole をもつ

$\Leftrightarrow$ f = constant.

<u>Theorem 2</u> (O)-case or (U)-case とし, $T>0$, $\forall p$ に対し, $\partial_p(S)=\partial_p(T)$ とする. また, (U)-case では $d_K\equiv 1 \pmod 4$ を仮定する. $F\in\mathcal{S}(\prod_p \underline{U}_p;1)$, $f\in\mathcal{S}(\prod_p U_p;1)$ がともに Hecke 作用素の同時固有関数で, $W_{F,f}(1)=\langle F|G_A, f\rangle\neq 0$ ならば, f に対する Conjecture の成立から F に対する Conjecture が導かれる. より詳しく言うと, f が Conjecture (i) [resp. (i) and (ii), (i) and (ii) and (iii)] をみたせば, F も Conjecture (i) [resp. (i) and (ii), (i) and (ii) and (iii)] をみたす.

<u>Corollary</u> K: 虚2次体, $d_K\equiv 1 \pmod 4$, N を平方因子をもたない自然数で, 各素因子は K で不分岐不分解とする. $\mathcal{S}=\begin{bmatrix} N & \\ & 1_{m-1}\end{bmatrix}$, $G=U(\mathcal{S})$ とする. $f\in\mathcal{S}(\prod_p U_p, 1)$ が Hecke 作用素の同時固有関数で, $f(1)\neq 0$ ならば, f に対し, Conjecture (i), (ii), (iii) が成り立つ.

§5. 補足

1° 特別な local Shintani function [(0)-case] §3で述べたように、一般には $W(\lambda,\Lambda)$ の一次元性, explicit formula は分かっていない。しかし、$\lambda=$ trivial という特別な場合には、存在するための Λ の条件, explicit formula を知ることができる。これは、$G\backslash H/H_{\mathcal{O}}$ が一つの parameter で記述されることによる。$H=O(T)$ の split rank を $\nu+1$ とし, $0\leq r\leq \nu+1$ に対して

$$C_H^{(r)}=\{h\in H \mid P\cdot h:\text{integral},\ \mathrm{rank}_{\mathcal{O}/P\mathcal{O}}(P\cdot h)=r\}$$

とおくと、$C_H^{(1)},\cdots,C_H^{(\nu+1)}$ が Hecke 環 $\mathcal{H}(H,H_{\mathcal{O}})$ の generator を与える。$1\leq j\leq \nu$ に対し、

$$(11)\qquad f_{\nu,j}=\frac{q^{\partial-1}(q^{\nu-j+1}-1)(q^{\nu-j+n_0}+q^{\partial})}{q^{j}-1}\qquad\begin{pmatrix}\nu+1=\nu(T)\\ n_0=n_0(T)\\ \partial=\partial(T)\end{pmatrix}$$

とおく.

<u>Proposition 3</u> $\dim_{\mathbb{C}} W(1,\Lambda)\leq 1$ であり、$W(1,\Lambda)\neq\{0\}$ となる必要十分条件は、$1\leq {}^{\forall}r\leq\nu+1$ に対し

$$\Big(\prod_{j=1}^{r-1}f_{\nu,j}\Big)^{-1}\Lambda(C_H^{(r)})-\Lambda(C_H^{(1)})=q^{r}f_{\nu,r}+q^{r+\partial-1}-q f_{\nu,1}-q^{\partial}$$

が成立することである。また、このとき L関数は、

$$\frac{L(\Lambda;s)}{A_T(s)}=\prod_{j=1}^{\nu}(1-q^{\frac{n_0}{2}-1+j-s})^{-1}(1-q^{-\frac{n_0}{2}+1-j-s})^{-1}$$

$$\times \left\{ 1 - (\Lambda(C_H^{(1)}) - q f_{\nu,1} - q^2 + 1) q^{-\frac{m-1}{2} - s} + q^{-2s} \right\}^{-1}$$

と分解する.

2°. 正則尖点形式［(U)-case］

(U)-case では，任意の符号で正則保型形式を考えることができる．ρ_∞ として weight に対応する１次表現 ρ_ℓ をとれば，（実素点での球関数の理論を用いて）§4 の結果を全ての符号に一般化できる。概略を述べておく．

S を符号 $(\nu+n_0, \nu)$ $(m = 2\nu + n_0)$ の hermitian matrix で，$\mathbb{Q}$ 上の Witt index も ν としておく．ℓ を十分大なる偶数，$\omega = \omega_\infty \prod_{p<\infty} \omega_p$ を，$\omega_\infty(t) = t^{\ell/2}$ $(t \in T)$ なる $K^1 \backslash K_A^1$ の指標とする。 $S(\prod_p U_p ; \rho_\ell)$ で，weight ℓ の正則尖点形式の空間をあらわす．Hecke eigen form $f \in S(\prod_p U_p ; \rho_\ell)$ に対して，

(12) $$\mathfrak{Z}(f \otimes \omega ; s) \underset{\mathrm{def}}{=} L_\infty(f \otimes \omega ; s) \prod_{p<\infty} L_p(f \otimes \omega ; s)$$

とおく．

ここで

$$L_\infty(f \otimes \omega ; s) = (2\pi)^{-ms} |\det S|^s \, |d_K|^{s([\frac{m}{2}] + \frac{1}{2})}$$
$$\times \prod_{i=1}^{\nu} \Gamma\left(s + \tfrac{\ell - n_0 + 1}{2} - i\right) \prod_{j=1}^{n_0+\nu} \Gamma\left(s + \tfrac{\ell + n_0 + 1}{2} - j\right),$$

$L_p(f \otimes \omega ; s)$ は §3 で定義された local standard L の twist.

$\mathfrak{Z}(f \otimes \omega ; s)$ は全 s-平面に解析接続され，関数等式

$$(*) \qquad C_{f\otimes\omega}(s) \underset{\sim}{=} \frac{\zeta(f\otimes\omega : s)}{\zeta(f\otimes\omega : 1-s)} = \begin{cases} (-1)^{\frac{m}{2}} & \text{if} \quad m:\text{even} \\ (-1)^{\frac{\ell}{2}} & \text{if} \quad m:\text{odd} \end{cases}$$

が予想される.

<u>Proposition 4</u> $F \in S(\prod_p \underline{U}_p ; \rho_\ell)$, $f \in S(\prod_p U_p ; \rho_\ell)$ がともに Hecke eigen とし, $W_{F,f}(1) = \langle F|G_A, f\rangle \neq 0$ ならば,

$$C_{F\otimes\omega}(s) = (-1)^{[\frac{m+1}{2}]+\frac{\ell}{2}}\, C_{f\otimes\omega}(s-\tfrac{1}{2})$$

とくに. f が Conj. (*) をみたせば F も (*) をみたす.

<u>3° 他の Eisenstein series との convolution [(0)-case]</u> 我々は Proposition 2 で. サイズ $m+2$ の直交群上の Eisenstein series として. Levi part が (m次直交群) $\times GL_1$ である放物部分群から作られたものを考えた. 他の放物部分群に対しても. 同様のことが出来る. 例えば. $G_1 = O(m,2)$ $(m \geq 2)$ とすると. Levi part が (i) $O(m-2)\times GL_1 \times GL_1$ の場合 (i.e. minimal parabolic) と (ii) $O(m-2)\times GL_2$ の場合 (別の maximal parabolic) が生ずる.

$$S_1 = \begin{bmatrix} & & J \\ & S_0 & \\ J & & \end{bmatrix}, \quad J = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}. \quad S_0 > 0 \quad (\text{サイズ } m-2) \text{ とする.}$$

(i) $B_1 = \left\{ \begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \\ & & & & * \end{bmatrix} \in G_1 \right\}$ に関する Eisenstein series :

$\mathrm{sgn}(T)=(m-1,2)$, $H=O(T)\overset{\iota}{\hookrightarrow} G_1$ とし, H 上の weight l の正則尖点形式 F と, G_0 上の cusp form f_0 から作られる次の Eisenstein series の convolution を考える.

(13)
$$\mathbb{E}(g,f_0,l;s,s_0) \underset{\mathrm{def}}{=} \sum_{\gamma\in B_{1,\mathbb{Q}}\backslash G_{1,\mathbb{Q}}} f_0(\beta(\gamma g))\,|\alpha(\gamma g)|_A^{s+\frac{m}{2}}\, |\alpha_0(\gamma g)|_A^{s_0+\frac{m-2}{2}}\, J_{G_1}(k(\gamma g)_\infty, Z_0)^{l},$$

ここで
$$g=\begin{bmatrix}\alpha(g) & * & * & * & * \\ & \alpha_0(g) & * & * & * \\ & & \beta(g) & * & * \\ & & & \alpha_0(g)^{-1} & * \\ & & & & \alpha(g)^{-1}\end{bmatrix} k(g)$$
と岩沢分解し.

$s, s_0\in\mathbb{C}$, $J_{G_1}(g,Z_0)$ は G_1 上の保型因子. これは (4) で f として (parameter s_0 の入った) Eisenstein series をとったものである.

Prop. 2, Theorem 1 及び [5] の結果を用いて次を得る.

<u>Proposition 5</u> F を H 上の weight l の正則尖点形式, f_0 を G_0 上の cusp form とする. ともに Hecke eigen のとき.

$$\int_{H_{\mathbb{Q}}\backslash H_A} F(h)\,\mathbb{E}(\iota(h),f_0;s-\tfrac12,s_0-\tfrac12)\,dh$$
$$= c\cdot(2\pi)^{-s_0}\,2^{-s}\,\frac{\Gamma(s+l-\frac{m-1}{2})\,\Gamma(s_0+l-\frac{m-1}{2})}{\Gamma(\frac{s+s_0+l}{2})\,\Gamma(\frac{s-s_0+l+1}{2})}$$
$$\times\frac{L(F;s)\,L(F;s_0)}{L(f_0;s+\frac12)\,L(f_0;s_0+\frac12)}\,\frac{1}{\zeta(s+s_0)\,\zeta(s-s_0+1)}\times\begin{cases}1 & \cdots\ m:\text{even}\\ \dfrac{1}{\zeta(2s)\,\zeta(2s_0)} & \cdots\ m:\text{odd}\end{cases}$$

(ii) $P_1' = \left\{ \left[\begin{array}{cc|c|cc} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ \hline & & * & * & \\ \hline & & & * & * \\ & & & * & * \end{array}\right] \in G_1 \right\}$ に関する Eisenstein series :

$f_0 : G_0 = O(S_0)$ $\quad (sgn(S_0) = (m-2, 0))$ の cusp form

$\varphi : GL_2$ 上の cusp form

$F : H = O(T)$ $\quad (sgn(T) = (m-1, 2))$ 上の cusp form とする.

(簡単のため, weight を無視する). (f_0, φ) から作られる G_1 上の Eisenstein series を考える.

$$E'(g; f_0, \varphi; s) \underset{def}{=} \sum_{\gamma \in P'_{1,\mathbb{Q}} \backslash G_{1,\mathbb{Q}}} \varphi(A(\gamma g)) f_0(B(\gamma g)) |\det A(\gamma g)|_A^{s+\frac{m+1}{2}}$$

ここで,

$$g = \begin{bmatrix} A(g) & * & * \\ & B(g) & * \\ & & J^{-1}\,{}^tA(g)^{-1}J \end{bmatrix} k(g)$$

と岩沢分解した.

Prop. 2, 5 と同じように,

$$\int_{H_\mathbb{Q} \backslash H_A} F(h) E'(\iota(h); f_0, \varphi; s - \tfrac{1}{2})\, dh = Z'_{F, f_0, \varphi}(s)$$

を, Whittaker function (一般化されたもの) の $G_A \backslash H_A \times GL_1(A)$ 上の積分に直すことが出来る. また Euler 積分解

$$(**) \quad Z'_{F, f_0, \varphi}(s) \sim \frac{L(F \otimes \varphi; s)}{L(f \otimes \varphi; s + \frac{1}{2})} \times \begin{cases} L^{Sym}(\varphi; 2s)^{-1} & m : odd \\ L(\omega; 2s)^{-1} & m : even \end{cases}$$

の成立が予想される. ここで, $L(F \otimes \varphi; s)$ は GL_2 の保型形式 φ で twist した L 関数 (degree は $L(F; s)$ の 2 倍), ω は

φ の central character, $L^{Sym}(\varphi; s)$ は φ の symmetric tensor L をあらわす。f_0 = constant の場合には、(**) の成立が証明できている。

References

[1] Furusawa, M. and Shalika, J.A. : On Fourier coefficients of Eisenstein series, Algebraic Analysis, Geometry and Number Theory, Proceeding of JAMI International Conference, The Johns Hopkins University, 81-98, 1989.

[2] Murase, A. and Sugano, T. : Whittaker-Shintani functions on the symplectic group of Fourier-Jacobi type, Compositio Math. 79 (1991), 321-349.

[3] Murase, A. and Sugano, T. : Shintani function and its application to automorphic L-functions for classical groups ; Part I. The case of orthogonal groups, MPI preprint series (1991); Part II Rankin-Selberg convolution of two variables for O(m, 2), MPI preprint series (1992); Part III. Pullback of Eisenstein series on GSp_2 to Hilbert modular groups, preprint (1991).

[4] Piatetski-Shapiro, I and Rallis, S. : L-functions for the classical groups, Springer Lecture Notes 1254, 1987.

[5] Sugano, T : On Dirichlet series attached to holomorphic cusp forms on SO(2, q), Advanced Studies in Pure Math. 7 (1985), 333-362.